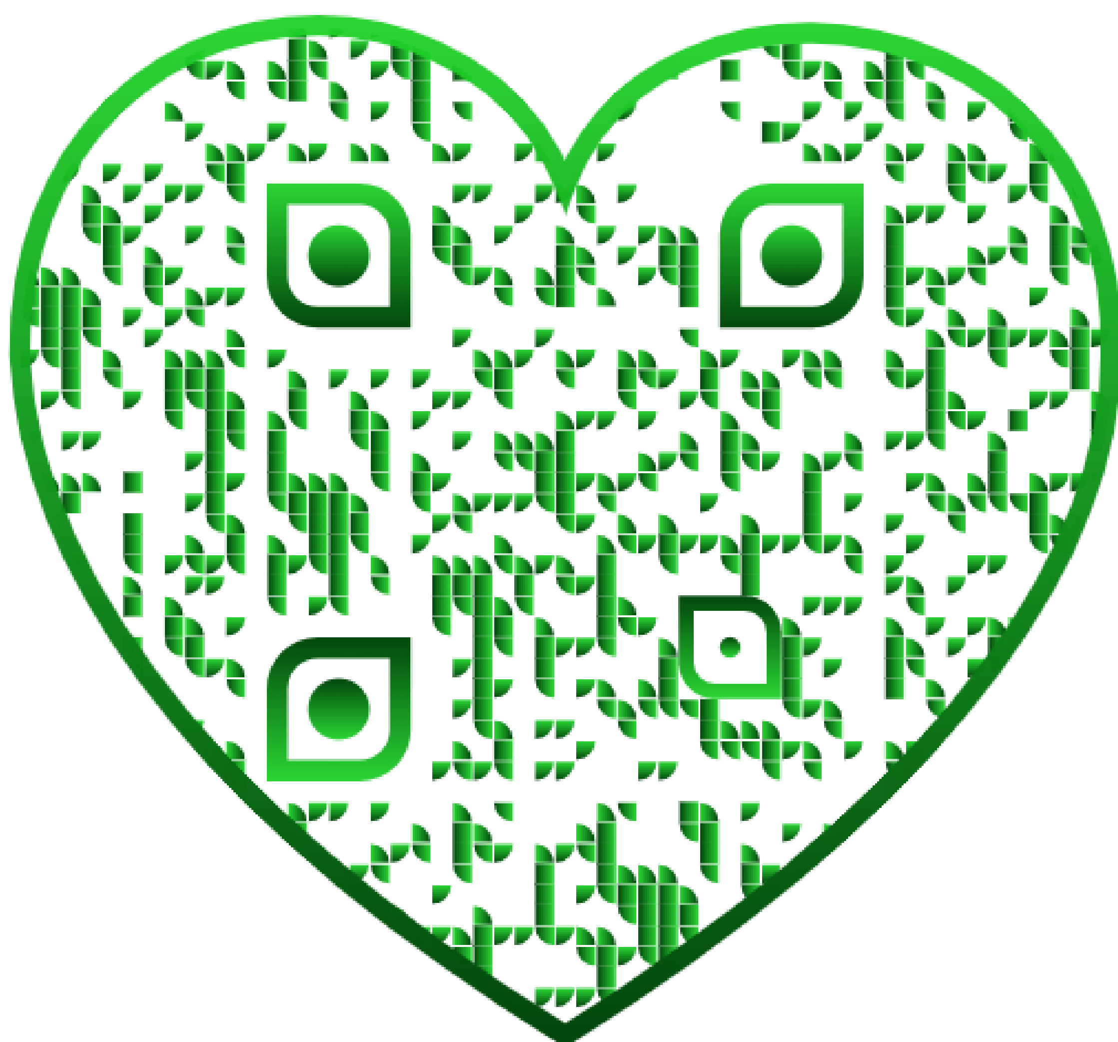
Estratégia Concursos

Aula 04

Resumos para Concursos

Autor:

04 de Dezembro de 2023



Bizu Estratégico Regular de Matemática Financeira

ANÁLISE ESTATÍSTICA

Segue abaixo uma análise estatística dos assuntos mais exigidos pelas bancas Cebraspe, FCC e FGV, no âmbito da disciplina de Matemática Financeira, tomando como base os concursos realizados nos anos de 2020 a 2023:

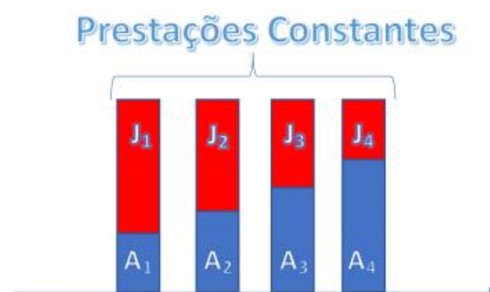
Matemática Financeira	
Assunto	**% de cobrança**
Sistemas de Amortização	27,68%
Análise de Investimentos	22,06%
Equivalência de Capitais	15,44%
Taxas	12,71%
Operações de Desconto	10,29%
Juros simples e compostos	7,62%

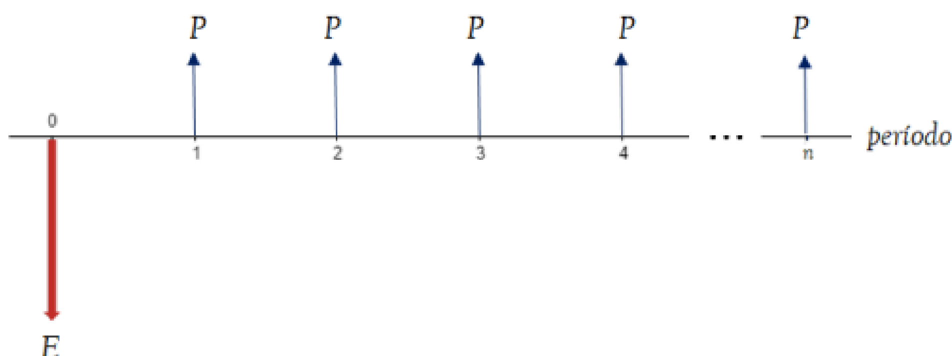
Com essa análise, podemos verificar quais são os temas mais exigidos pelas principais bancas examinadoras e, por meio disso, focaremos nos principais pontos da disciplina em nossa revisão!

Sistemas de Amortização

1) Sistema Francês de Amortização (SF)

- ✓ Esse sistema admite prestações constantes e periódicas ao longo de todo o período de amortização.
    - Já que as prestações são constantes, à medida que são pagas as parcelas, a quota de amortização vai aumentando enquanto a quota de juros vai diminuindo.





- ✓ O Valor Atual (no nosso caso o valor E tomado Emprestado) de uma série de rendas certas Postecipadas é o valor no momento "0", também chamado de Valor Presente (VP), que equivale a soma de todas as n rendas certas P descontadas pela mesma taxa de juros i.
- ✓ Sendo assim, a fórmula de cálculo da Prestação será:

$$\boldsymbol{E = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad ou \quad E = P \times \left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i \times (1+i)^{n}}\right]}$$

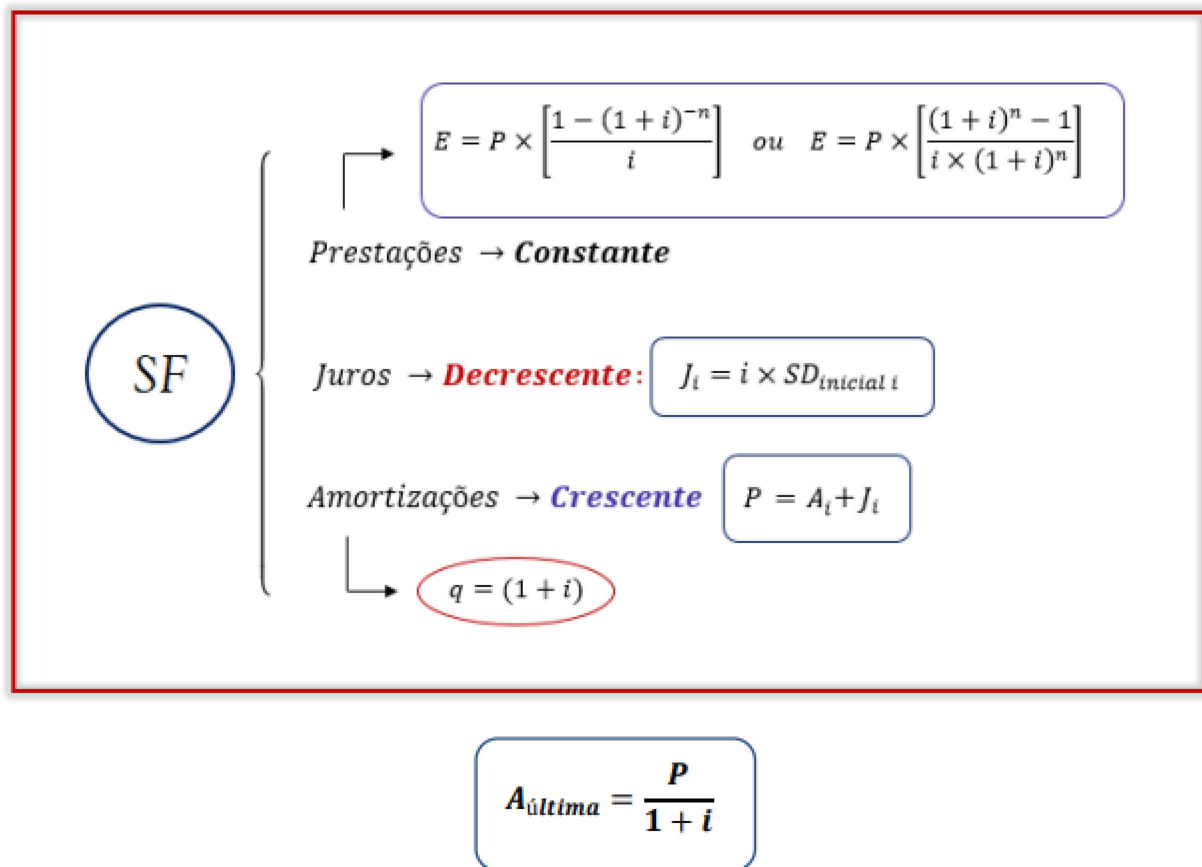
Onde,

$E = Valor\ do\ Empréstimo$

$P = Valor\ das\ Prestações\ iguais$

$n = número\ de\ prestações$

$i = Taxa\ de\ Juros$



$$A_{última} = \frac{P}{1+i}$$

2) Sistema de Amortização Constante (SAC)

✓Como o próprio nome já indica, as quotas de amortização do SAC são constantes. Logo, as prestações não serão constantes.

- No SAC, as prestações são decrescentes. A quota de amortização é constante e os juros são decrescentes.
- Os juros pagos em cada período formam uma Progressão Aritmética.





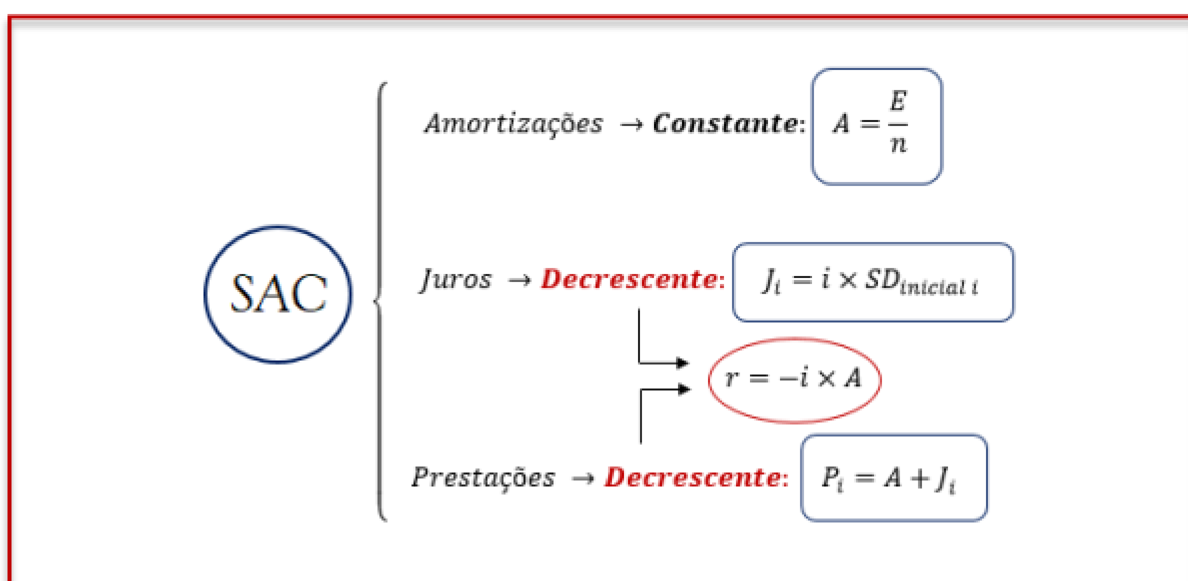
$$A = \frac{E}{n}$$

Onde,

A = $Amortização$

E = $Empréstimo$

n = $número\ de\ parcelas\ ou$ prestações



3) Sistema de Amortização Misto (SAM) ou Sistema de Amortização Crescente (SACRE)

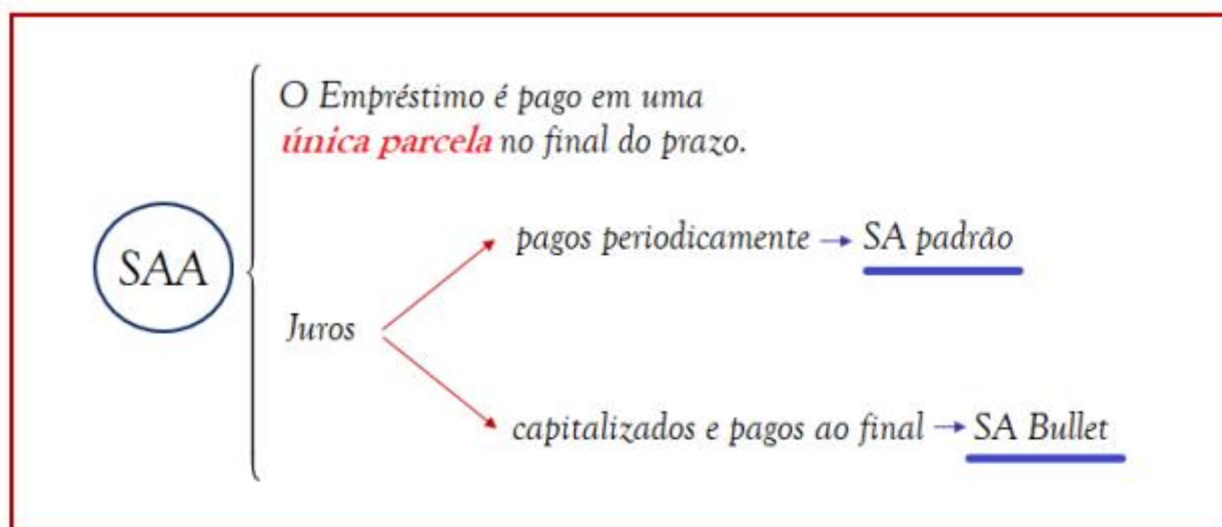
✓ A prestação do Sistema de Amortização Misto (SAM) é obtida pela média aritmética entre as prestações do Sistema de Amortização Constante (SAC) e do Sistema Francês (Tabela Price).

$$P_{SAM} = \frac{P_{SAC} + P_{SF}}{2}$$

4) Sistema Americano de Amortização

- ✓ O Sistema de Amortização Americano é uma forma de pagamento de empréstimos que se caracteriza pelo pagamento apenas dos juros da dívida, deixando o valor da dívida constante, que pode ser paga em apenas um único pagamento.
- ✓ Neste sistema de amortização, é muito comum a constituição, pelo devedor, de um fundo cuja finalidade é garantir o pagamento único a ser efetuado ao final do período de carência.
    - Fundo de amortização (conhecido como *sinking fund*): formado por uma série de depósitos periódicos, em uma conta remunerada, de tal forma que, na data do pagamento do principal, seu montante seja igual ao valor necessário para liquidar a dívida. O valor de cada depósito será:

      $P = \frac{F}{s_{n\neg i}}$, em que o valor futuro F corresponde ao valor a ser desembolsado para liquidar o financiamento.



➔ No último concurso do TCU, a FGV elaborou a seguinte questão:

Um empréstimo de uma unidade monetária é concedido nas seguintes condições:

i. juros compostos de 5% ao mês;

ii. taxa de abertura de crédito de 5% sobre o valor financiado, sendo o pagamento no ato;

iii. amortizações mensais constantes;

iv. prazo total de 2 meses.

Utilize a aproximação: $(2,2975)^{0,5} = 1,52$

A taxa positiva que representa o custo efetivo total mensal desse empréstimo é, aproximadamente, de:

a) 9%
b) 8%
c) 7%
d) 6%
e) 5%

Solução: Nesta questão a banca nos cobra sobre sistemas de amortização.

Precisamos aqui determinar o valor do custo efetivo total do financiamento. Vamos pensar o seguinte: o empréstimo é de R$100. O valor de 100 reais renderá juros compostos durante os dois meses. A amortização mensal é de 100/2 = 50 reais. Então, as prestações pagas são de:

$P1 = 50 + 100.(0,05) = 55$ reais

$P2 = 50 + 50.(0,05) = 52,5$ reais

Então, temos que, com a taxa de abertura de crédito de 5%, o valor presente líquido do empréstimo de R$95. Podemos calcular a taxa "i" que iguala os valores presentes da seguinte forma:

$95 = 55/(1 + i) + 52{,}5/(1 + i)^2$

Sendo 1 + i = x, e dividindo tudo por 100 temos:

$0{,}95 = 0{,}55/x + 0{,}525/x^2$ (*multiplicando tudo por* x^2)

$0{,}95x^2 = 0{,}55x + 0{,}525$

$0{,}95x^2 – 0{,}55x – 0{,}525 = 0$

Precisamos agora encontrar as raízes da equação. Resolvendo por Bhaskara chegamos a:

$$x = \frac{0{,}55 \pm \sqrt{(-0{,}55)^2 - 4.0{,}95.(-0{,}525)}}{2(0{,}95)}$$

$$x = \frac{0{,}55 \pm \sqrt{2{,}2975}}{1{,}9}$$

$$x = \frac{0{,}55 \pm 1{,}52}{1{,}9}$$

$$x' = 1{,}09$$

$$x'' = -0{,}5$$

Como não existe custo efetivo total negativo, temos que:

$1 + i = 1{,}09$

$i = 0{,}09$ ou 9%

<u>Portanto, alternativa A correta.</u>



Análise de Investimentos

5) Valor Presente Líquido (VPL)

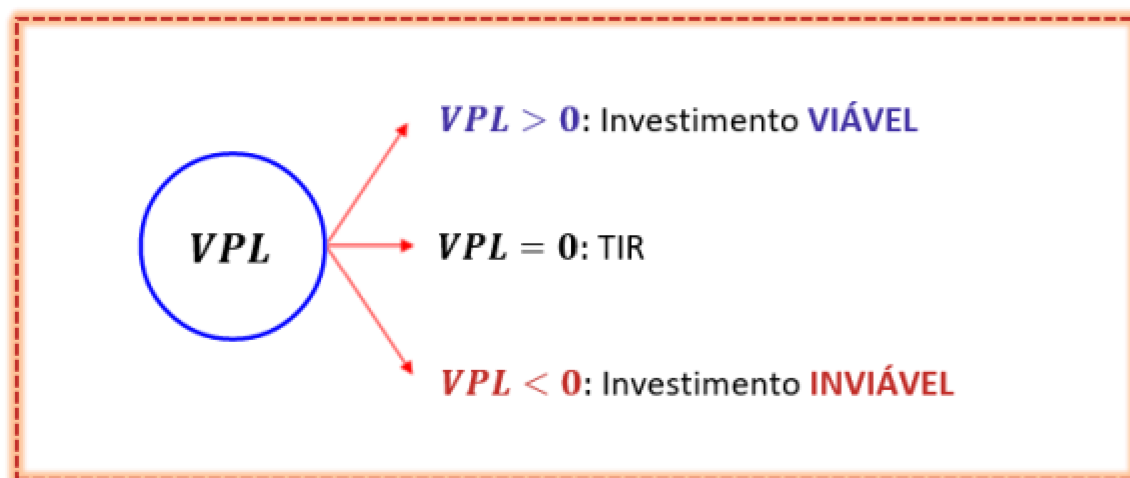
- ✓ O Valor Presente Líquido (VPL), como o próprio nome sugere, é o Valor do fluxo de caixa no momento $t = 0$, isto é, no tempo inicial do investimento.
- ✓ TAXA MÍNIMA DE ATRATIVIDADE (ia) significa a rentabilidade mínima que interessa ao investidor. Representa o mínimo que se espera de retorno financeiro que o investimento possa proporcionar.

$$VPL \;\rightarrow\; taxa\ de\ desconto = TMA$$

O VPL pressupõe que os valores são reinvestidos com base na **própria TMA**.

Na matemática financeira (e também nos exercícios de concursos), a TMA também poderá ser chamada de **Custo de Oportunidade** ou **Custo de Capital**.

- $VPL > 0$: Investimento é **VIÁVEL**, ou seja, o investimento é atrativo economicamente.
- $VPL = 0$: Investimento vai resultar exatamente na Taxa Interna de Retorno TIR (iremos analisar esse caso específico mais à frente nesta aula).
- $VPL < 0$: Investimento é **INVIÁVEL**, ou seja, o investimento não é atrativo economicamente.



6) Taxa Interna de Retorno (TIR)

- ✓ A Taxa Interna de Retorno (TIR) é uma modalidade de análise de investimento que analisa o percentual de retorno financeiro de um projeto.
- ✓ A TIR é a taxa de desconto que, quando aplicada sobre o fluxo de caixa futuro trazido a valor presente, iguala-o ao investimento inicial.
- ✓ Em outras palavras, a TIR é a taxa que iguala a ZERO o VPL.

$$TIR \rightarrow VPL = 0$$

- $TIR > i_a$: Investimento é **VIÁVEL**
- $TIR = i_a$: Investimento é INVARIÁVEL
- $TIR < i_a$: Investimento é **INVIÁVEL**



7) Payback Descontado

- ✓ O Payback Descontado, como o próprio nome sugere, estima o tempo de retorno de um investimento DESCONTANDO o fluxo de caixa a valor presente.



8) Taxa de Rentabilidade e Índice de Lucratividade

$$taxa\ rentabilidade = \frac{VPL}{Inv.Inicial}$$

$$IL = 1 + \frac{VPL}{Inv.Inicial}$$

Equivalência de Capitais

9) Operações Financeiras

- ✓ Vamos aprender a "transportar" uma parcela no tempo, ou seja, iremos entender como levar uma parcela presente para o futuro (capitalização) e como trazer uma parcela do futuro para o presente (desconto ou descapitalização). E isso vai depender do regime dos juros, se simples ou composto.

  - Para a **Capitalização Simples** usaremos as seguintes fórmulas:

$$VF = VP \times (1 + i \times t) \quad ou \quad VP = \frac{VF}{(1 + i \times t)}$$

  - Já para a **Capitalização Composta**, as equações serão:

$$VF = VP \times (1 + i)^t \quad ou \quad VP = \frac{VF}{(1 + i)^t}$$

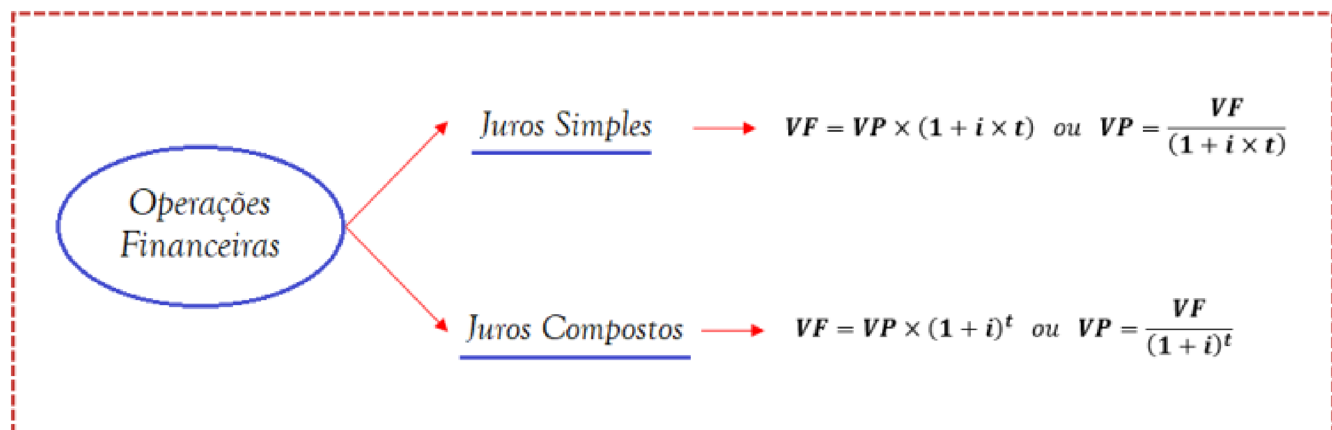
Onde,

VF = Valor Futuro

VP = Valor Presente ou Valor Atual

i = taxa de juros

t = período



10) Equivalência de Capitais

✓ Dois ou mais conjuntos de capitais, com datas diferentes, são ditos equivalentes quando, transportados para uma mesma data, a uma mesma taxa de juros, produzem, nessa data, valores iguais.

- Em juros compostos, se dois conjuntos de capitais são equivalentes em determinada data focal, então eles também serão equivalentes em qualquer outra data focal.

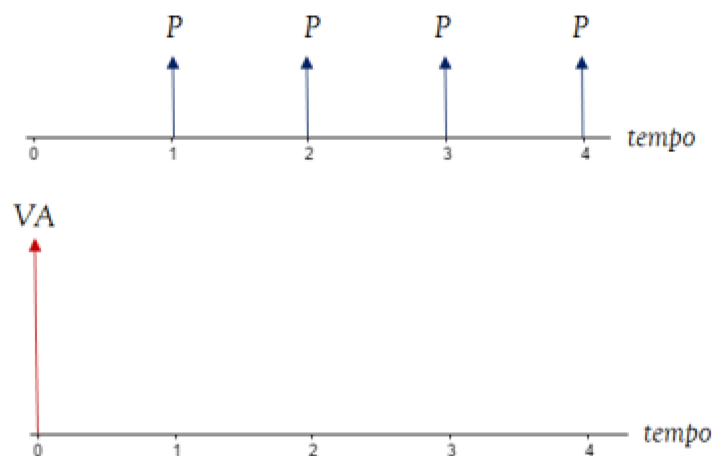
Essa é a fórmula fundamental de equivalência de capitais:

Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$.

Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$.

11) Valor Atual de uma Série de Rendas Certas Postecipadas

✓ O Valor Atual (VA) de uma série de rendas certas Postecipadas é o valor no momento "0", também chamado de Valor Presente (VP), que equivale a soma de todas as n rendas certas P descontadas pela mesma taxa de juros i.



✓ O Valor Atual (VA) ou Valor Presente (VP) é calculado pela seguinte fórmula:



$$VA = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right] \quad ou \quad VA = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Onde,

$VA = Valor\ Atual\ de\ toda\ a\ série\ de\ rendas\ certas\ postecipadas$

$P = Parcela$

$n = número\ de\ parcelas\ iguais$

$i = taxa\ de\ juros\ ou\ taxa\ de$ desconto

12) Fator de Valor Atual

- ✓ O fator que multiplica a Parcela na fórmula do Valor Atual é chamado de Fator de Valor Atual.

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right] \rightarrow fator\ de\ valor\ atual$$

- ✓ Esse fator pode ser encontrado na questão pela seguinte simbologia:

$$a_{n\neg i} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Onde,

$n = número\ de\ parcelas\ iguais$

$i = taxa\ de\ juros\ ou\ taxa\ de$ desconto

✓ Algumas bancas, ao invés de fornecer para os cálculos, o Fator de Valor Atual, informam o Fator de Recuperação de Capital (FRC) que matematicamente significa o inverso do Fator de Valor Atual.

$$FRC = \frac{1}{a_{n \neg i}}$$

✓ Algumas bancas trazem o valor de $an\neg i$ da seguinte forma:

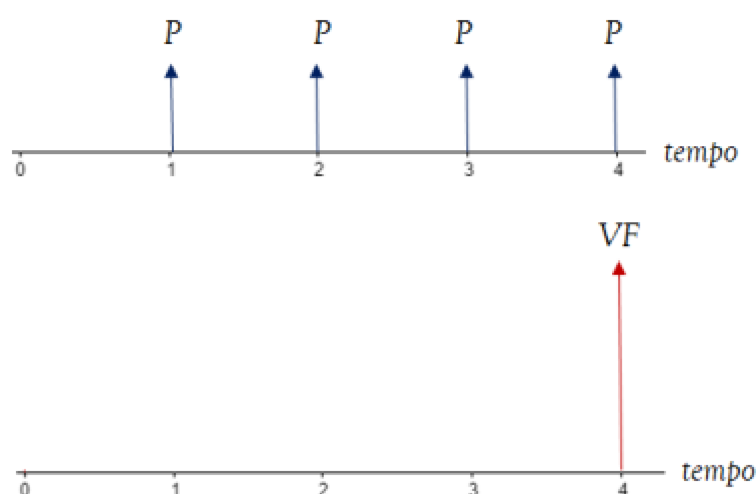
$$a_{n \neg i} = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots \frac{1}{(1+i)^n}$$

Ou,

$$a_{n \neg i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k}$$

13) Valor Futuro de uma Série de Rendas Certas Postecipadas

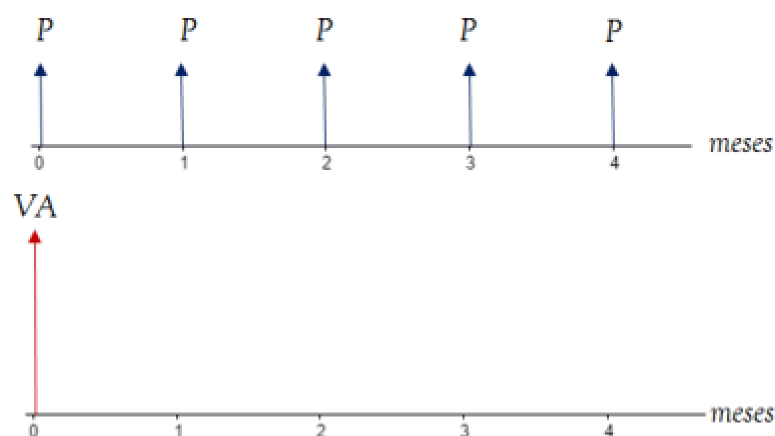
✓ O Valor Futuro (VF) de uma série de rendas certas Postecipadas é o valor no momento "n" que equivale a soma de todas as n rendas certas P capitalizadas pela mesma taxa de juros i.



$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

14) Valor Atual de uma Série de Rendas Certas Antecipadas

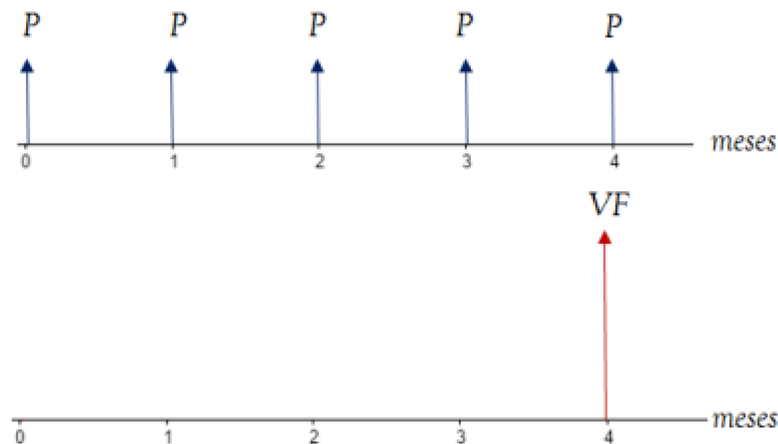
✓ O Valor Atual (VA) de uma série de rendas certas Antecipadas é o valor no momento "0", também chamado de Valor Presente (VP), que equivale a soma de todas as n rendas certas P descontadas pela mesma taxa de juros i.



$$VA = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right] \times (1+i) \quad ou \quad VA = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \times (1+i)$$

15) Valor Futuro de uma Série de Rendas Certas Antecipadas

✓ O Valor Futuro (VF) de uma série de rendas certas Antecipadas é o valor no momento "n" que equivale a soma de todas as n rendas certas P capitalizadas pela mesma taxa de juros i.



$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Série de Rendas Certas

$$VA = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right] \quad ou \quad VA = P \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Obs. Se renda antecipada, a fórmula do VA é multiplicada por (1+i)

➔ No último concurso da Receita Federal, a FGV elaborou a seguinte questão:

Lionel pretende comprar um carro que pode ser pago à vista, por 80 mil reais, ou a prazo, por 120 mil reais, com uma entrada e mais duas prestações iguais, a primeira a ser paga depois de um ano e a segunda a ser paga depois de mais um ano. Lionel dispõe de 150 mil reais, que estão aplicados no banco, com rendimento de 50% ao ano. Lionel prefere pagar a prazo.

O valor máximo da entrada que Lionel deve pagar de modo que a opção a prazo seja preferível é de

a) 60 mil reais
b) 50 mil reais
c) 40 mil reais
d) 30 mil reais
e) 20 mil reais

Solução: A questão nos cobrou o conhecimento da equivalência de capitais.

Note que para o pagamento a prazo está previsto Entrada + 2 parcelas iguais. Dessa forma, temos que 120.000 = E + 2P.

Isolando o valor da parcela, teremos:

$$P = \frac{120.000 - E}{2}$$

A questão informou que:

- VPL = 80 mil (valor à vista)
- Parcela 1 = Parcela 2 = P
- taxa = 50% a.a
- Entrada = E

Substituindo a valor presente (que é o valor à vista), teremos:

$$80.000 = E + \frac{P}{(1+0,5)^1} + \frac{P}{(1+0,5)^2}$$

$$80.000 = E + \frac{\frac{120.000 - E}{2}}{(1+0,5)^1} + \frac{\frac{120.000 - E}{2}}{(1+0,5)^2}$$

$$80.000 = E + \frac{120.000 - E}{3} + \frac{120.000 - E}{4,5}$$

$$360.000 = 4,5E + \ 180.000 - 1,5E + \ 120.000 - E$$

$$60.000 = 2E$$

$$E = R\$\ 30.000,00$$

Portanto, o valor máximo da entrada que Lionel deve pagar de modo que a opção a prazo seja preferível é de **30 mil reais.**

Dessa forma, o gabarito é a **LETRA D.**

Taxas

16) Taxa Efetiva

✓Passo a passo para questões de "taxa efetiva x operação de desconto comercial simples":

i) Calcule o desconto normalmente usando a fórmula do desconto comercial simples: $N \cdot i_{cs} \cdot n$, onde N é o valor nominal do título e i_{cs} é a taxa de desconto comercial simples.

ii) Utilize a fórmula de juros simples, substituindo o capital pelo valor atual e o juro pelo valor do desconto.

➔ Caso você ache muito trabalhoso aplicar os dois passos anteriores, existe uma fórmula para calcular a taxa efetiva:

$$i_{ef} = \frac{i_{CS}}{1 - i_{CS} \times t}$$

➔ Há também a fórmula da Taxa Efetiva para o Desconto Comercial Composto:

$$i_{ef} = \left(\frac{1}{1 - i_{CC} \times t}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Divisão/Multiplicação → "Quem manda é o período de capitalização"

Taxa Efetiva

Unidade de tempo da taxa é coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização

Taxa Nominal

Unidade de tempo da taxa NÃO É coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização

17) Taxas Equivalentes

✓ Duas taxas são ditas equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital inicial, pelo mesmo prazo, produzem o mesmo montante.

✓ Para o cálculo das taxas equivalentes basta efetuar a comparação dos fatores $(1 + i)^n$.

18) Taxa Aparente

✓ Também chamada de Taxa nominal, é a taxa de juros total de uma operação financeira. Nela, NÃO SÃO descontados os efeitos inflacionários.

19) Taxa de Inflação

✓ Inflação, resumidamente, é o aumento generalizado de preços. A Taxa de inflação representa a perda do valor do dinheiro no tempo.

20) Taxa Real

✓ Como o próprio nome diz, é o que realmente se ganha (ou se perde) em uma operação. É o resultado de fato de um investimento, por exemplo. Na Taxa real, SÃO descontados os efeitos inflacionários.

21) Taxa Aparente (i_a) x Taxa de Inflação (i_i) x Taxa Real (i_r)

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

22) Inflação Acumulada

$$(1 + i_{iac}) = (1 + i_{i1}) \times (1 + i_{i2}) \times (1 + i_{i3}) \times \ldots \times (1 + i_{in})$$

23) Taxa Nominal e Taxa Efetiva

✓Ao se deparar com uma taxa nominal, para efeito de cálculo, a mesma deve ser convertida para taxa efetiva por meio da seguinte fórmula:

$$Taxa\ efetiva = \frac{Taxa\ Nominal}{Número\ de\ períodos\ de\ capitalização\ contidos\ na\ taxa\ nominal}$$

24) Taxas Proporcionais

✓Duas taxas são proporcionais quando a razão entre elas é igual à razão entre os respectivos períodos expressos na mesma unidade de tempo.

✓A definição de taxas proporcionais não está condicionada ao regime de capitalização.

- *Contudo, no regime de capitalização simples, as taxas proporcionais são equivalentes.*

✓Temos taxas proporcionais se:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$$



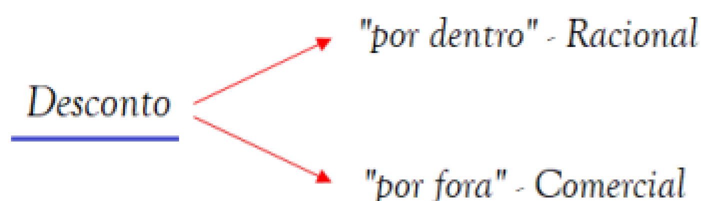
Operações de Desconto

25) Operação de Desconto

Valor Nominal, Valor de Face, Valor Futuro (N)	É o valor que está escrito no título. É o valor que deve ser pago na data do vencimento.
Valor Atual, Valor Presente, Valor Líquido, Valor Descontado (A)	O valor líquido é obtido pela diferença entre o valor nominal e o desconto.
Desconto (D)	Desconto é o abatimento que se faz no valor de uma dívida quando ela é negociada antes da data de vencimento. É a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

Para decorar esta fórmula, pense que **Desconto** tem que estar no **DNA** do aluno. Ou seja,

$$D = N - A$$



O **Desconto Racional** toma como base, para o cálculo do Desconto, o **Valor Atual** do título. Enquanto que o **Desconto Comercial** utiliza o **Valor Nominal**.

26) Descontos Simples

- *Desconto Racional Simples*
  $$\begin{cases} D_{RS} = A \times i \times t \\ A = \dfrac{N}{(1 + i \times t)} \end{cases}$$

- *Desconto Comercial Simples*
  $$\begin{cases} D_{CS} = N \times i \times t \\ A = N \times (1 - i \times t) \end{cases}$$

Quando a questão nada falar acerca do regime trabalhado, adotaremos a convenção de usar o regime simples.

27) Relação Matemática entre o Desconto Racional Simples e o Desconto Comercial Simples

$$\boldsymbol{D_{CS} = D_{RS} \times (1 + i \times t)}$$

28) Descontos Compostos

- *Desconto Racional Composto*
  $$\begin{cases} A = \dfrac{N}{(1 + i)^t} \\ D_{RC} = N - A \end{cases}$$

- *Desconto Comercial Composto*
  $$\begin{cases} A = N \times (1 - i)^t \\ D_{CC} = N - A \end{cases}$$

29) Desconto Bancário

- ✓O desconto bancário é uma modalidade de desconto comercial, acrescida de taxas e despesas administrativas.

- ✓ $\boxed{A = N - D_f - D_b}$, onde A é o valor atual, N é o valor nominal, D_f é o desconto por fora (comercial) e D_b são as despesas administrativas e taxas cobradas pelo banco.



Juros Simples e Compostos

30) Juros Simples

C → Capital inicial
i → taxa de juros simples
n → tempo de aplicação
J → juro simples produzido durante o período de aplicação.
M → montante ao final da aplicação

$$j = C \cdot i \cdot n$$
$$M = C + j$$
$$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

✓As unidades de tempo de referência do período de aplicação e da taxa devem ser **iguais**.

31) Juros Simples Ordinários (Comerciais) e Exatos

✓Juros simples ordinários (comerciais): utiliza o ano comercial com 360 dias e meses com 30 dias.

- Todos os meses são considerados com 30 dias.
- É a regra para resolução das questões.

✓Juros simples exatos: utiliza o ano civil com 365 dias.

- Utilizamos o calendário civil para verificarmos a quantidade de dias em cada mês ou entre duas datas. Logo, quando o mês tem 31 dias deveremos considerar o total e não 30 dias.
- Somente deve ser usado quando for expresso explicitamente na operação/questão.

32) Juros Compostos

$$M_S = C \cdot (1 + in) \rightarrow Montante\ Simples$$

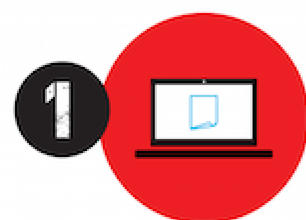
$$M_C = C \cdot (1 + i)^n \rightarrow Montante\ Composto$$

Se n > 1, o montante composto é maior que o montante simples.
Se n = 1, os montantes nos dois regimes são iguais.
Se n < 1, o montante simples é maior que o montante composto.



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



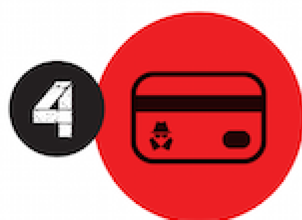
Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



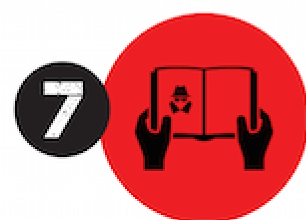
Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



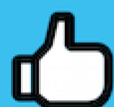
Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.